УДК 517.956

***ШОЙМКУЛОВ* Б.М.**
к.ф.-м.н., доцент кафедры математического анализа и теории функции Таджикского национального университета (Душанбе)

О НЕКОТОРЫХ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ОДНОЙ СИНГУЛЯРНОЙ И ДВУМЯ СВЕРХСИНГУЛЯРНЫМИ ТОЧКАМИ
ON SOME OVER DETERMINED SYSTEM OF FIRST ORDER PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH ONE SINGULAR AND TWO SUPERSINGULAR POINTS

В настоящей работе исследована переопределенная система дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с одной сингулярной и двумя сверхсингулярными точками.

***Ключевые слова**: дифференциальные уравнения в частных производных, системы дифференциальных уравнений, частные производные переопределенная, сингулярные, сверхсингулярные, точка.*

In this paper, we investigate over determined system of first-order partial differential equations with one singular and two supersingular points.

***Key words:** partial differential equations, systems of differential equations, partial derivatives redefined, singular, supersingular, point.*

Пусть область D - является параллелепипедом $D = \{(x, y) : 0 < x < a_0, 0 < y < b_0, 0 < z < c_0\}$ ограниченной поверхностями $\Gamma_1 = \{0 < x < a_0, y = 0, z = 0\}$, $\Gamma_2 = \{0 < y < b_0, x = 0, y = 0,$ $\Gamma_3 = \{0 < z < c_0, x = 0, y = x\}$.

В области D рассмотрим систему вида

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{xa_1(x, y, z)}{r} u + \dfrac{f_1(x, y, z)}{r}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{ya_2(x, y, z)}{r^\beta} u + \dfrac{f_2(x, y, z)}{r^\beta}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial z} = \dfrac{za_3(x, y, z)}{r^\gamma} u + \dfrac{f_3(x, y, z)}{r^\gamma}, \end{cases} \tag{1}$$

где $\beta > 1, \gamma > 1$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $a_i(x, y, z), f_i(x, y, z) (1 \le i \le 3) -$ заданные функции, $u(x, y, z) \in C^1(D)$ -неизвестная функция.

Предположим, что коэффициенты и правые части системы (1) удовлетворяют условиям:

$$\begin{aligned} &a_1(x, y, z), a_3(x, y, z), f_1(x, y, z), f_3(x, y, z) \in C'_y(\overline{D}) \\ &a_2(x, y, z), a_3(x, y, z), f_2(x, y, z), f_3(x, y, z) \in C'_x(\overline{D}) \\ &a_1(x, y, z), a_2(x, y, z), f_1(x, y, z), f_2(x, y, z) \in C'_z(\overline{D}) \end{aligned} \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}[\frac{ya_2(x,y,z)}{r^{\beta}}]=\frac{\partial}{\partial y}[\frac{xa_1(x,y,z)}{r}], \tag{3}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}[\frac{za_3(x,y,z)}{r^{\gamma}}]=\frac{\partial}{\partial z}[\frac{xa_1(x,y,z)}{r}], \tag{4}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}[\frac{za_3(x,y,z)}{r^{\gamma}}]=\frac{\partial}{\partial z}[\frac{xa_2(x,y,z)}{r^{\beta}}], \tag{5}$$

$$\begin{gathered} r^{\beta+1}\frac{\partial}{\partial x}[\frac{f_2(x,y,z)}{r^{\beta}}]+ya_2(x,y,z)f_1(x,y,z)= \\ =r^{\beta+1}\frac{\partial}{\partial y}[\frac{f_1(x,y,z)}{r}]+xa_1(x,y,z)f_2(x,y,z), \end{gathered} \tag{6}$$

$$\begin{gathered} r^{\gamma+1}\frac{\partial}{\partial x}[\frac{f_3(x,y,z)}{r^{\gamma}}]+za_3(x,y,z)f_1(x,y,z)= \\ =r^{\gamma+1}\frac{\partial}{\partial z}[\frac{f_1(x,y,z)}{r}]+xa_1(x,y,z)f_3(x,y,z), \end{gathered} \tag{7}$$

$$\begin{gathered} r^{\beta+\gamma}\frac{\partial}{\partial y}[\frac{f_3(x,y,z)}{r^{\gamma}}]+za_3(x,y,z)f_2(x,y,z)= \\ =r^{\beta+\gamma}\frac{\partial}{\partial z}[\frac{f_2(x,y,z)}{r^{\beta}}]+ya_2(x,y,z)f_3(x,y,z). \end{gathered} \tag{8}$$

Условие (2)-(8) для системы (1) являются условиями совместности (разрешимости), при их выполнении интегрирование системы (1) начнем с третьего уравнения. В этом случае однородное уравнение третое уравнение системы (1) запишем в виде

$$\frac{\partial \ln u}{\partial z}=\frac{za_3(x,y,z)}{r^{\gamma}}. \tag{9}$$

В равенстве (9) выражение $\frac{za_3(x,y,z)}{r^{\gamma}}$ в точке $r=0$ неинтегрируема, поэтому интегрируя выражения $\frac{z(a_3(x,y,z)-a_3(0,0,0))}{r^{\gamma}}+\frac{za_3(0,0,0)}{r^{\gamma}}$ для нахождение $u(x,y,z)$ получим

$$\ln u(x,y,z)=\int_0^z\frac{s(a_3(x,y,s)-a_3(0,0,0))}{(\sqrt{x^2+y^2+s^2})^{\gamma}}ds-\frac{a_3(0,0,0)}{(\gamma-2)(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^{\gamma-2}}+\psi_1(x,y). \tag{10}$$

После имеем

$$u(x,y,z)=\exp(\omega_3(x,y,z)-a_3(0,0,0)\omega_3^{\gamma}(x,y,z))\psi_1(x,y), \tag{11}$$

где $\omega_3(x,y,z)=\int_0^z\frac{s(a_3(x,y,s)-a_3(0,0,0))}{(\sqrt{x^2+y^2+s^2})^{\gamma}}ds, \omega_3^{\gamma}(x,y,z)=\frac{1}{(\gamma-2)(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^{\gamma-2}}$,

$\psi_1(x,y)-$произвольно-дифференцируемая функция переменных x и y.

Далее, предположим, что в равенстве (11) произвольная функция функсияи $\psi_1(x,y)$ также зависит от переменной z, тогда дифференцируя равенство (11)

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\exp(\omega_3(x,y,z)-a_3(0,0,0)\omega_3^{\gamma}(x,y,z))[\frac{za_3(x,y,z)}{r^{\gamma}}\psi_1(x,y)+\psi'_1(x,y)].$$

После, подставляя значение $\frac{\partial u}{\partial z}$ в третьем уравнение системы (1) учитывая (11) имеем

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \exp(\omega_3(x,y,z) - a_3(0,0,0)\omega_3^{\gamma}(x,y,z))[\frac{za_3(x,y,z)}{r^{\gamma}}\psi_1(x,y) + \psi'_1(x,y)] =$$

$$= \frac{za_3(x,y,z)}{r^{\gamma}}\exp(\omega_3(x,y,z) - a_3(0,0,0)\omega_3^{\gamma}(x,y,z))\psi_1(x,y) + \frac{f_3(x,y,z)}{r^{\gamma}}.$$

Отсюда

$$\psi'_1(x,y) = \frac{f_3(x,y,z)}{r^{\gamma}}\exp(-\omega_3(x,y,z) + a_3(0,0,0)\omega_3^{\gamma}(x,y,z)).$$

После интегрирования, получим

$$\psi_1(x,y) = \int_0^z \frac{f_3(x,y,s)}{(\sqrt{x^2+y^2+s^2})^{\gamma}}\exp(-\omega_3(x,y,s) + \\ + a_3(0,0,0))\omega_3^{\gamma}(x,y,s))ds + \psi_2(x,y), \tag{12}$$

где $\psi_2(x,y)$ - произвольно-дифференцируемая функция переменных x и y.

Подставляя значение $\psi_1(x,y)$ из (12) в (11) находим общее решение третьей уравнение системы (1) в виде

$$u(x,y,z) = \exp(\omega_3(x,y,z) - a_3(0,0,0)\omega_3^{\gamma}(x,y,z))[\psi_2(x,y) + \\ + \int_0^z \frac{f_3(x,y,s)}{(\sqrt{x^2+y^2+s^2})^{\gamma}}\exp(-\omega_3(x,y,s) + a_3(0,0,0))\omega_3^{\gamma}(x,y,s))ds]. \tag{13}$$

Предположим, что функции $a_3(x,y,z)$ и $f_3(x,y,z)$ удовлетворяют следующим:

1). Функция $a_3(x,y,z)$ в окрестности точек $r=0$ удовлетворяет условию типа Гёлдера

$$|a_3(x,y,z) - a_3(0,0,0)| \le H_1(r^{\gamma_1}), H_1 = const > 0, \gamma_1 > \gamma - 1. \tag{14}$$

2). Функция $f_3(x,y,z)$ в окрестности точек $r=0$ обращается в нуль с асимптотическими формулами

$$f_3(x,y,z) = o(r^{\gamma_2}), \gamma_2 > \gamma - 1. \tag{15}$$

3). $a_3(0,0,0) > 0.$

Тогда интегралы равенство (13) сходятся.

В этом случае дифференцируя (13)

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \exp(\omega_3(x,y,z) - a_3(0,0,0)\omega_3^{\gamma}(x,y,z))\{(\frac{\partial \omega_3(x,y,z)}{\partial y} + \frac{ya_3(0,0,0)}{r^{\gamma}})[\psi_2(x,y) + \\ + \int_0^z \frac{f_3(x,y,s)}{(\sqrt{x^2+y^2+s^2})^{\gamma}}\exp(-\omega_3(x,y,s) + a_3(0,0,0))\omega_3^{\gamma}(x,y,s))ds] + \frac{\partial \psi_2(x,y)}{\partial y} + \\ + \int_0^z \frac{\partial}{\partial y}[\frac{f_3(x,y,s)}{(\sqrt{x^2+y^2+s^2})^{\gamma}}\exp(-\omega_3(x,y,s) + a_3(0,0,0))\omega_3^{\gamma}(x,y,s))]ds\}$$

подставляя в второй уравнение системы (1) получим

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\exp(\omega_3(x,y,z)-a_3(0,0,0)\omega_3^{\gamma}(x,y,z))\{(\frac{\partial\omega_3(x,y,z)}{\partial y}+\frac{ya_3(0,0,0)}{r^{\gamma}})[\psi_2(x,y)+$$
$$+\int_0^z\frac{f_3(x,y,s)}{(\sqrt{x^2+y^2+s^2})^{\gamma}}\exp(-\omega_3(x,y,s)+a_3(0,0,0))\omega_3^{\gamma}(x,y,s))ds]+\frac{\partial\psi_2(x,y)}{\partial y}+$$
$$+\int_0^z\frac{\partial}{\partial y}[\frac{f_3(x,y,s)}{(\sqrt{x^2+y^2+s^2})^{\gamma}}\exp(-\omega_3(x,y,s)+a_3(0,0,0))\omega_3^{\gamma}(x,y,s))]ds\}= \qquad (16)$$
$$=\frac{ya_2(x,y,z)}{r^{\beta}}\exp(\omega_3(x,y,z)-a_3(0,0,0)\omega_3^{\gamma}(x,y,z))[\psi_2(x,y)+$$
$$+\int_0^z\frac{f_3(x,y,s)}{(\sqrt{x^2+y^2+s^2})^{\gamma}}\exp(-\omega_3(x,y,s)+a_3(0,0,0))\omega_3^{\gamma}(x,y,s))ds]+\frac{f_2(x,y,z)}{r^{\beta}}.$$

Преобразуя равенство (16) имеем

$$\frac{\partial\psi_2(x,y)}{\partial y}=(\frac{ya_2(x,y,z)}{r^{\beta}}-\frac{\partial\omega_3(x,y,z)}{\partial y}-\frac{ya_3(0,0,0)}{r^{\gamma}})[\psi_2(x,y)+$$
$$+\int_0^z\frac{f_3(x,y,s)}{(\sqrt{x^2+y^2+s^2})^{\gamma}}\exp(-\omega_3(x,y,s)+a_3(0,0,0))\omega_3^{\gamma}(x,y,s))ds]+$$
$$+\frac{f_2(x,y,z)}{r^{\beta}}\exp(-\omega_3(x,y,z)+a_3(0,0,0))\omega_3^{\gamma}(x,y,z))-$$
$$-\int_0^z\frac{\partial}{\partial y}[\frac{f_3(x,y,s)}{(\sqrt{x^2+y^2+s^2})^{\gamma}}\exp(-\omega_3(x,y,s)+a_3(0,0,0))\omega_3^{\gamma}(x,y,s))]ds\}. \qquad (17)$$

В равенстве (17) левая часть зависит от переменных x и y а правая часть зависит от переменных x, y и z. Отсюда получим условии совместности

$$\frac{\partial}{\partial z}[(\frac{ya_2(x,y,z)}{r^{\beta}}-\frac{\partial\omega_3(x,y,z)}{\partial y}-\frac{ya_3(0,0,0)}{r^{\gamma}})[\psi_2(x,y)+$$
$$+\int_0^z\frac{f_3(x,y,s)}{(\sqrt{x^2+y^2+s^2})^{\gamma}}\exp(-\omega_3(x,y,s)+a_3(0,0,0))\omega_3^{\gamma}(x,y,s))ds]+$$
$$+\frac{f_2(x,y,z)}{r^{\beta}}\exp(-\omega_3(x,y,z)+a_3(0,0,0))\omega_3^{\gamma}(x,y,z))]= \qquad (18)$$
$$=\frac{\partial}{\partial y}[\frac{f_3(x,y,z)}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^{\gamma}}\exp(-\omega_3(x,y,z)+a_3(0,0,0))\omega_3^{\gamma}(x,y,z))]$$

которой эквивалентно условиям совместности системы (1). Используя условии (18) получим дифференциальной уравнении в частных производных

$$\frac{\partial\psi_2(x,y)}{\partial y}=(\frac{ya_2(x,y,0)}{(x^2+y^2)^{\frac{\beta}{2}}}-\frac{ya_3(0,0,0)}{(x^2+y^2)^{\frac{\gamma}{2}}})\psi_2(x,y)+\frac{f_2(x,y,0)}{(x^2+y^2)^{\frac{\beta}{2}}}\exp(a_3(0,0,0)\omega_3^{\gamma}(x,y,0)). \qquad (19)$$

Далее, дифференцируя равенство (13) по переменной x

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\exp(\omega_3(x,y,z)-a_3(0,0,0)\omega_3^{\gamma}(x,y,z))\{(\frac{\partial\omega_3(x,y,z)}{\partial x}+\frac{xa_3(0,0,0)}{r^{\gamma}})[\psi_2(x,y)+$$
$$+\int_0^z\frac{f_3(x,y,s)}{(\sqrt{x^2+y^2+s^2})^{\gamma}}\exp(-\omega_3(x,y,s)+a_3(0,0,0))\omega_3^{\gamma}(x,y,s))ds]+\frac{\partial\psi_2(x,y)}{\partial x}+$$
$$+\int_0^z\frac{\partial}{\partial x}[\frac{f_3(x,y,s)}{(\sqrt{x^2+y^2+s^2})^{\gamma}}\exp(-\omega_3(x,y,s)+a_3(0,0,0))\omega_3^{\gamma}(x,y,s))]ds\}$$

после подставляя в первой уравнение системы (1)

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\exp(\omega_3(x,y,z)-a_3(0,0,0)\omega_3^{\gamma}(x,y,z))\{(\frac{\partial\omega_3(x,y,z)}{\partial x}+\frac{xa_3(0,0,0)}{r^{\gamma}})[\psi_2(x,y)+$$
$$+\int_0^z\frac{f_3(x,y,s)}{(\sqrt{x^2+y^2+s^2})^{\gamma}}\exp(-\omega_3(x,y,s)+a_3(0,0,0))\omega_3^{\gamma}(x,y,s))ds]+\frac{\partial\psi_2(x,y)}{\partial x}+$$
$$+\int_0^z\frac{\partial}{\partial x}[\frac{f_3(x,y,s)}{(\sqrt{x^2+y^2+s^2})^{\gamma}}\exp(-\omega_3(x,y,s)+a_3(0,0,0))\omega_3^{\gamma}(x,y,s))]ds\}=$$
$$=\frac{xa_1(x,y,z)}{r}\exp(\omega_3(x,y,z)-a_3(0,0,0))\omega_3^{\gamma}(x,y,z))[\psi_2(x,y)+$$
$$+\int_0^z\frac{f_3(x,y,s)}{(\sqrt{x^2+y^2+s^2})^{\gamma}}\exp(-\omega_3(x,y,s)+a_3(0,0,0))\omega_3^{\gamma}(x,y,s))ds]+\frac{f_1(x,y,z)}{r}. \tag{20}$$

разделяя на $\exp(\omega_3(x,y,z)-a_3(0,0,0)\omega_3^{\gamma}(x,y,z))$ получим равенство

$$\frac{\partial\psi_2(x,y)}{\partial x}=(\frac{xa_1(x,y,z)}{r}-\frac{\partial\omega_3(x,y,z)}{\partial x}-\frac{xa_3(0,0,0)}{r^{\gamma}})[\psi_2(x,y)+$$
$$+\int_0^z\frac{f_3(x,y,s)}{(\sqrt{x^2+y^2+s^2})^{\gamma}}\exp(-\omega_3(x,y,s)+a_3(0,0,0))\omega_3^{\gamma}(x,y,s))ds]+$$
$$+\frac{f_1(x,y,z)}{r}\exp(-\omega_3(x,y,z)+a_3(0,0,0)\omega_3^{\gamma}(x,y,z))-$$
$$-\int_0^z\frac{\partial}{\partial x}[\frac{f_3(x,y,s)}{(\sqrt{x^2+y^2+s^2})^{\gamma}}\exp(-\omega_3(x,y,s)+a_3(0,0,0))\omega_3^{\gamma}(x,y,s))]ds. \tag{21}$$

Равенство (21) дифференцируем по переменной z

$$\frac{\partial}{\partial z}[(\frac{xa_1(x,y,z)}{r}-\frac{\partial\omega_3(x,y,z)}{\partial x}-\frac{xa_3(0,0,0)}{r^{\gamma}})[\psi_2(x,y)+$$
$$+\int_0^z\frac{f_3(x,y,s)}{(\sqrt{x^2+y^2+s^2})^{\gamma}}\exp(-\omega_3(x,y,s)+a_3(0,0,0))\omega_3^{\gamma}(x,y,s))ds]+$$
$$+\frac{f_1(x,y,z)}{r}\exp(-\omega_3(x,y,z)+a_3(0,0,0)\omega_3^{\gamma}(x,y,z))-$$
$$-\int_0^z\frac{\partial}{\partial x}[\frac{f_3(x,y,s)}{(\sqrt{x^2+y^2+s^2})^{\gamma}}\exp(-\omega_3(x,y,s)+a_3(0,0,0))\omega_3^{\gamma}(x,y,s))]ds]=0. \tag{22}$$

Таким образом, получим условии

$$\frac{\partial}{\partial z}\{(\frac{xa_1(x,y,z)}{r}-\frac{\partial\omega_3(x,y,z)}{\partial x}-\frac{xa_3(0,0,0)}{r^{\gamma}})[\psi_2(x,y)+$$
$$+\int_0^z\frac{f_3(x,y,s)}{(\sqrt{x^2+y^2+s^2})^{\gamma}}\exp(-\omega_3(x,y,s)+a_3(0,0,0))\omega_3^{\gamma}(x,y,s))ds]+$$
$$+\frac{f_1(x,y,z)}{r}\exp(-\omega_3(x,y,z)+a_3(0,0,0)\omega_3^{\gamma}(x,y,z))\}= \tag{23}$$
$$=\frac{\partial}{\partial x}[\frac{f_3(x,y,z)}{(\sqrt{x^2+y^2+s^2})^{\gamma}}\exp(-\omega_3(x,y,z)+a_3(0,0,0))\omega_3^{\gamma}(x,y,z))]$$

эквивалентной условиям совместности системы (1).

Из этой условии получим дифференциальной уравнений по переменной x

$$\frac{\partial\psi_2(x,y)}{\partial x}=(\frac{xa_1(x,y,0)}{(x^2+y^2)^{\frac{\beta}{2}}}-\frac{xa_3(0,0,0)}{(x^2+y^2)^{\frac{\gamma}{2}}})\psi_2(x,y)+\frac{f_1(x,y,0)}{(x^2+y^2)^{\frac{\beta}{2}}}\exp(\omega_3^{\gamma}(x,y,0)). \tag{24}$$

Из равенств (24) и (19) получим систему вида

$$\begin{cases}\frac{\partial\psi_2(x,y)}{\partial x}=(\frac{xa_1(x,y,0)}{(x^2+y^2)^{\frac{\beta}{2}}}-\frac{xa_3(0,0,0)}{(x^2+y^2)^{\frac{\gamma}{2}}})\psi_2(x,y)+\frac{f_1(x,y,0)}{(x^2+y^2)^{\frac{\beta}{2}}}\exp(a_3(0,0,0)\omega_3^{\gamma}(x,y,0)),\\ \frac{\partial\psi_2(x,y)}{\partial y}=(\frac{ya_2(x,y,0)}{(x^2+y^2)^{\frac{\beta}{2}}}-\frac{ya_3(0,0,0)}{(x^2+y^2)^{\frac{\gamma}{2}}})\psi_2(x,y)+\frac{f_2(x,y,0)}{(x^2+y^2)^{\frac{\beta}{2}}}\exp(a_3(0,0,0)\omega_3^{\gamma}(x,y,0)).\end{cases} \tag{25}$$

Интегрирования системы (25) начнём со второго уравнения. Однородной уравнение второе уравнение системы (25) преобразуем в виде

$$\frac{\partial\ln\psi_2(x,y)}{\partial y}=\frac{ya_2(x,y,0)}{(x^2+y^2)^{\frac{\beta}{2}}}-\frac{ya_3(0,0,0)}{(x^2+y^2)^{\frac{\gamma}{2}}}.$$

Интегрируя имеем

$$\ln\psi_2(x,y)=\int_0^y\frac{\tau(a_2(x,\tau,0)-a_2(0,0,0))}{(x^2+\tau^2)^{\frac{\beta}{2}}}d\tau-\frac{a_2(0,0,0)}{(\beta-2)(x^2+y^2)^{\frac{\beta-2}{2}}}+\frac{a_3(0,0,0)}{(\gamma-2)(x^2+y^2)^{\frac{\gamma-2}{2}}}+\psi_1(x),$$

после получим

$$\psi_2(x,y)=\exp(\omega_2(x,y,0)-a_2(0,0,0)\omega_2^{\beta}(x,y,0)+a_3(0,0,0)\omega_3^{\gamma}(x,y,0))\psi_1(x), \tag{26}$$

где

$$\omega_2(x,y,0)=\int_0^y\frac{\tau(a_2(x,\tau,0)-a_2(0,0,0))}{(x^2+\tau^2)^{\frac{\beta}{2}}}d\tau,$$

$$\omega_2^{\beta}(x,y,0)=\frac{1}{(\beta-2)\sqrt{(x^2+y^2)}^{\beta-2}},\omega_3^{\gamma}(x,y,0)=\frac{1}{(\gamma-2)\sqrt{(x^2+y^2)}^{\gamma-2}},$$

$\psi_1(x)-$ произвольно дифференцируемая функция.

Равенство (26) дифференцируем по переменной y

$$\frac{\partial\psi_2(x,y)}{\partial y}=\exp(\omega_2(x,y,0)-a_2(0,0,0)\omega_2^{\beta}(x,y,0)+$$

$$+a_3(0,0,0)\omega_3^{\gamma}(x,y,0))\{(\frac{ya_2(x,y,0)}{(x^2+y^2)^{\frac{\beta}{2}}}-\frac{ya_3(0,0,0)}{(x^2+y^2)^{\frac{\gamma}{2}}})\psi_1(x)+\psi'_1(x)\}.$$

Подставляя во второй уравнение системы (2.25) имеем

$$\exp(\omega_2(x,y,0)-a_2(0,0,0)\omega_2^{\beta}(x,y,0)+a_3(0,0,0)\omega_3^{\gamma}(x,y,0))\{(\frac{ya_2(x,y,0)}{(x^2+y^2)^{\frac{\beta}{2}}}-$$

$$-\frac{ya_3(0,0,0)}{(x^2+y^2)^{\frac{\gamma}{2}}})\psi_1(x)+\psi'_1(x)\}=(\frac{ya_2(x,y,0)}{(x^2+y^2)^{\frac{\beta}{2}}}-\frac{ya_3(0,0,0)}{(x^2+y^2)^{\frac{\gamma}{2}}})\exp(\omega_2(x,y,0)-$$

$$-a_2(0,0,0)\omega_2^{\beta}(x,y,0)+a_3(0,0,0)\omega_3^{\gamma}(x,y,0))\psi_1(x)+\frac{f_2(x,y,0)}{(x^2+y^2)^{\frac{\beta}{2}}}\exp(a_3(0,0,0)\omega_3^{\gamma}(x,y,0)).$$

Отсюда получим

$$\psi'_1(x)=\frac{f_2(x,y,0)}{(x^2+y^2)^{\frac{\beta}{2}}}\exp(-\omega_2(x,y,0)+a_2(0,0,0)\omega_2^{\beta}(x,y,0)). \tag{27}$$

После интегрирования находим $\psi_1(x)$ в виде

$$\psi_1(x)=\int_0^y\frac{f_2(x,\tau,0)}{(x^2+\tau^2)^{\frac{\beta}{2}}}\exp(-\omega_2(x,\tau,0)+a_2(0,0,0)\omega_2^{\beta}(x,\tau,0))d\tau+\psi_2(x). \tag{28}$$

Учитывая равенство (28) получим $\psi_2(x,y)$ в виде

$$\psi_2(x,y)=\exp(\omega_2(x,y,0)-a_2(0,0,0)\omega_2^{\beta}(x,y,0)+a_3(0,0,0)\omega_3^{\gamma}(x,y,0))\{\psi_2(x)+$$

$$+\int_0^y\frac{f_2(x,\tau,0)}{(x^2+\tau^2)^{\frac{\beta}{2}}}\exp(-\omega_2(x,\tau,0)+a_2(0,0,0)\omega_2^{\beta}(x,\tau,0))d\tau\}. \tag{29}$$

От функции $\psi_2(x,y)$ потребуем, чтобы она удовлетворяло первой уравнение системы (25), для этого равенство (29) дифференцируем по переменной x

$$\frac{\partial\psi_2(x,y)}{\partial x}=\exp(\omega_2(x,y,0)-a_2(0,0,0)\omega_2^{\beta}(x,y,0)+a_3(0,0,0)\omega_3^{\gamma}(x,y,0))\{(\frac{\partial\omega_2(x,y,0)}{\partial x}+$$

$$+\frac{xa_2(0,0,0)}{(x^2+y^2)^{\frac{\beta}{2}}}-\frac{xa_3(0,0,0)}{(x^2+y^2)^{\frac{\gamma}{2}}})[\psi_2(x)+\int_0^y\frac{f_2(x,\tau,0)}{(x^2+\tau^2)^{\frac{\beta}{2}}}\exp(-\omega_2(x,\tau,0)+a_2(0,0,0)\omega_2^{\beta}(x,\tau,0))d\tau]+$$

$$+\psi'_2(x)+\int_0^y\frac{\partial}{\partial x}[\frac{f_2(x,\tau,0)}{(x^2+\tau^2)^{\frac{\beta}{2}}}\exp(-\omega_2(x,\tau,0)+a_2(0,0,0)\omega_2^{\beta}(x,\tau,0))]d\tau\}$$

после подставляя первой уравнение системы (25) получим

$$\psi'_2(x)=(\frac{xa_1(0,0,0)}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}-\frac{\partial\omega_2(x,y,0)}{\partial x}-\frac{xa_2(0,0,0)}{(x^2+y^2)^{\frac{\beta}{2}}})[\psi_2(x)+$$

$$+\int_0^y\frac{f_2(x,\tau,0)}{(x^2+\tau^2)^{\frac{\beta}{2}}}\exp(-\omega_2(x,\tau,0)+a_2(0,0,0)\omega_2^{\beta}(x,\tau,0))d\tau]+$$

$$+\frac{f_1(x,y,0)}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}\exp(-\omega_2(x,y,0)+a_2(0,0,0)\omega_2^{\beta}(x,y,0))-$$
$$-\int_0^y\frac{\partial}{\partial x}[\frac{f_2(x,\tau,0)}{(x^2+\tau^2)^{\frac{\beta}{2}}}\exp(-\omega_2(x,\tau,0)+a_2(0,0,0)\omega_2^{\beta}(x,\tau,0))]d\tau. \qquad (30)$$

Дифференцируя по переменной y получим условию

$$\frac{\partial}{\partial y}\{(\frac{xa_1(0,0,0)}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}-\frac{\partial\omega_2(x,y,0)}{\partial x}-\frac{xa_2(0,0,0)}{(x^2+y^2)^{\frac{\beta}{2}}})[\psi_2(x)+$$
$$+\int_0^y\frac{f_2(x,\tau,0)}{(x^2+\tau^2)^{\frac{\beta}{2}}}\exp(-\omega_2(x,\tau,0)+a_2(0,0,0)\omega_2^{\beta}(x,\tau,0))d\tau]+$$
$$+\frac{f_1(x,y,0)}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}\exp(-\omega_2(x,y,0)+a_2(0,0,0)\omega_2^{\beta}(x,y,0))\}=$$
$$=\frac{\partial}{\partial x}[\frac{f_2(x,y,0)}{(x^2+y^2)^{\frac{\beta}{2}}}\exp(-\omega_2(x,y,0)+a_2(0,0,0)\omega_2^{\beta}(x,y,0))]. \qquad (31)$$

При выполнении условии (31) получаем обыкновенной дифференциальной уравнении

$$\psi'_2(x)=(a_1(x,0,0)-\frac{a_2(0,0,0)}{x^{\beta-1}})\psi_2(x)+$$
$$+\frac{f_1(x,0,0)}{x}\exp(-\omega_2(x,0,0)+a_2(0,0,0)\omega_2^{\beta}(x,0,0)). \qquad (32)$$

Соответствующий однородной уравнений имееть вид

$$\psi'_2(x)=(a_1(x,0,0)-\frac{a_2(0,0,0)}{x^{\beta-1}})\psi_2(x).$$

После интегрируя получим

$$\psi_2(x)=\exp(\omega_1(x,0,0)+a_2(0,0,0)\omega_2^{\beta}(x,0,0))c_1 \qquad (33)$$

где $\omega_1(x,0,0)=\int_0^x a_1(t,0,0)dt$ и c_1 - произвольная постоянная.

Дифференцируя равенство (33), считая, что c_1 зависит от переменной x, подставляя в (32) получим дифференциальной уравнение вида

$$c_1'=\frac{f_1(x,0,0)}{x}\exp(-\omega_1(x,0,0)-\omega_2(x,0,0)).$$

Интегрируя получим

$$c_1=\int_0^x\frac{f_1(t,0,0)}{t}\exp(-\omega_1(t,0,0)-\omega_2(t,0,0))dt+c. \qquad (34)$$

Учытивая равенство (34) находим $\psi_2(x)$ в виде

$$\psi_2(x)=\exp(\omega_1(x,0,0)+a_2(0,0,0)\omega_2^{\beta}(x,0,0))[c+$$
$$+\int_0^x\frac{f_1(t,0,0)}{t}\exp(-\omega_1(t,0,0)-\omega_2(t,0,0))dt]. \qquad (35)$$

Подставим в равенство (29)

$$\psi_2(x,y)=\exp(\omega_2(x,y,0)-a_2(0,0,0)\omega_2^{\beta}(x,y,0)+a_3(0,0,0)\omega_3^{\gamma}(x,y,0))\{\exp(\omega_1(x,0,0)+$$
$$+a_2(0,0,0)\omega_2^{\beta}(x,0,0))[c+\int_0^x\frac{f_1(t,0,0)}{t}\exp(-\omega_1(t,0,0)-\omega_2(t,0,0))dt].+ \qquad (36)$$
$$+\int_0^y\frac{f_2(x,\tau,0)}{(x^2+\tau^2)^{\frac{\beta}{2}}}\exp(-\omega_2(x,\tau,0)+a_2(0,0,0)\omega_2^{\beta}(x,\tau,0))d\tau\}.$$

Подставляя в равенство (13), общее решение системы (1) находим в виде

$$u(x,y,z)=\exp(\omega_3(x,y,z)-a_3(0,0,0)\omega_3^{\gamma}(x,y,z))\{\exp(\omega_2(x,y,0)-a_2(0,0,0)\omega_2^{\beta}(x,y,0)+$$
$$+a_3(0,0,0)\omega_3^{\gamma}(x,y,0))[\exp(\omega_1(x,0,0)+a_2(0,0,0)\omega_2^{\beta}(x,0,0))(c+\int_0^x\frac{f_1(t,0,0)}{t}\exp(-\omega_1(t,0,0)-$$
$$-\omega_2(t,0,0))dt)+\int_0^y\frac{f_2(x,\tau,0)}{(x^2+\tau^2)^{\frac{\beta}{2}}}\exp(-\omega_2(x,\tau,0)+a_2(0,0,0)\omega_2^{\beta}(x,\tau,0))d\tau]+ \qquad (37)$$
$$+\int_0^z\frac{f_3(x,y,s)}{(\sqrt{x^2+y^2+s^2})^{\gamma}}\exp(-\omega_3(x,y,s)+a_3(0,0,0))\omega_3^{\gamma}(x,y,s))ds\}.$$

Теорема. *Пусть коэффициенты и правые части системы (1) удовлетворяют условиям (2),(3),(4),(5),(6),(7),(8),(4),(15),(18).*

Функция $a_2(x,y,0)$ в окрестности точек $r=0$ удовлетворяет условии типа Гёлдера

$$|a_2(x,y,0)-a_2(0,0,0)|\le H_3(r^{\gamma_3}),H_3=const>0,\gamma_3>\beta-1.$$

Функции $f_2(x,y,0)$ и $f_1(x,0,0)$ обращаются в нуль с асимптотическими формулами

$$f_2(x,y,0)=0(\sqrt{x^2+y^2})^{\gamma_4},\gamma_4>\beta-1,$$
$$f_1(x,0,0)=0(x^{\gamma_5}),\gamma_5>0.$$

Кроме того $a_3(0,0,0)>0$.

Тогда любое решение системы (1) из класса $C^1(D)$ представимо в виде (37), где c - произвольная постоянная.

Заметим, что решение вида (37) в окрестности точек $r=0$ ораниченно.

Литература

1. Раджабов Н. Интегральные представления и граничные задачи для некоторых дифференциальных уравнений с сингулярной линией или сингулярными поверхностями / Н.Раджабов // Душанбе, изд. ТГУ, ч. № I, 1980. - 126 с., ч. № II, 1981. - 170 с., ч. № III.1982. - 170 с.
2. Раджабов Н. Введение в теорию дифференциальных уравнений в частных производных со сверхсингулярными коэффициентами / Н.Раджабов //Душанбе 1992 (учебное пособие по спецкурсу), изд. ТГУ. - 236 с.
3. Шоймкулов Б.М., К теории некоторых переопределенных систем уравнений в частных производных второго порядка с сингулярными точками на плоскости / Б.М. Шоймкулов, Э. Рузметов // Дифференциальные и

интегральные уравнения и их приложения (сборник научных статей), ТГПУ, вып.6, Душанбе-1998. - С.96-106.

4. Шоймкулов Б.М., Линейная переопределенная система второго порядка с одной сингулярной точкой / Б.М. Шоймкулов, Н. Раджабов // Вестник Национального Университета (серия естественных наук), №3(26), Душанбе, ТГНУ, «Сино» - 2005. - С.3-10.
5. Шоймкулов Б.М. Интегральные представления многообразия решений для одного класса дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка с тремя сверхсингулярными областями/Б.М.Шоймкулов, Н.Раджабов, А.О.Комилов// Вестник Таджикского национального университета, № 1/2, (научный журнал), серия естественных наук, Душанбе. – 2017. – С. 3–7.