УДК

# К ТЕОРИИ ОДНОГО КЛАССА ВЫРОЖДАЮЩИЕСЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

***Н.Раджабов***
*доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа и теории функций*
***Д.А.Кодиров***
*ассистент кафедры математического анализа и теории функций*
*Таджикский национальный университет*

В работе для одного класса вырождающиеся дифференциальных уравнений четвертого порядка, когда параметры этого уравнения с параметрами двух дифференциальных операторов второго порядка связаны определённым образом в зависимость от корней двух характеристических уравнение, получено представление многообразные решений, через четырёх произвольных постоянных.

Вырождающиеся дифференциальный оператор четвертого порядка приставлен в виде произведений вырождающиеся двух дифференциальных операторов второго порядка. Если коэффициенты дифференциальных операторов четвёртого порядка связаны при помощи (5) с коэффициентами дифференциальных второго порядка, тогда представленные выражения имеют место. Полученные интегральные зависят от корней алгебраического уравнения (9) и (10).

**Ключевые слова:** вырождающиеся дифференциальных уравнений, интегральные представления, многообразия решение.

Через $\Gamma = \{x: a < x < b\}$ обозначим множество точек на вещественной оси.

В дальнейшем через $L_1$ обозначим следующий дифференциальный оператор второго порядка:

$$L_1 = (D_a^x)^2 + AD_a^x + B, \qquad (1)$$

где A и B известные постоянные $D_a^x = (x-a)\frac{d}{dx}$ а через $L_2$ обозначим дифференциальный оператор второго порядка следящего вида:

$$L_2 = (D_a^x)^2 + A_1 D_a^x + B_1 \ , \qquad (2)$$

где $A_1$и $B_1$ –известные постоянные, тогда если через $L_3$ обозначим произведенные дифференциальных оператор $L_1 L_2$, легко можно видеть, что $L_1 L_2(\varphi) = L_3(\varphi)$, где

$$L_3 = (D_a^x)^4\varphi + (A_1 + A)(D_a^x)^3\varphi + (B_1 + AA_1 + B)(D_a^x)^2\varphi +$$

$$+(A_1 + AB_1 + A_1 B)D_a^x\varphi + BB_1\varphi\,, \qquad (3)$$

На Г рассмотрим дифференциальное уравнение следующее вида,

$$(D_a^x)^4\varphi + E_1(D_a^x)^3\varphi + E_2(D_a^x)^2\varphi + E_3 D_a^x\varphi + E_4\varphi = f\,, \qquad (4)$$

где $E_1, E_2, E_3, E_4$ $(1 \le j \le 4)$-извествие постоянные.

Проблеме исследованием дифференциальных уравнений с сингулярными коэффициентами или вырождающийся дифференциальных уравнений и связаны с ним интегральным уравнения посвящено работа [ 2 ] − [ 3 ] и другие.

Если в дифференциальные уравнение (4) параметры $E_1, E_2, E_3, E_4$ с параметрами дифференциальных операторов $L_1, L_2$ связаны следующим образом

$$E_1 = A_1 + A,\ E_2 = B_1 + AA_1 + B,\ E_3 = A_1 + AB_1 + A_1 B,\ E_4 = BB_1, \quad (5)$$

тогда, дифференциальные уравнение (4) можно записать в следующем виде

$$L_1 L_2\varphi = f(x), \qquad (6)$$

$$L_1(\varphi) = (D_a^x)^2\varphi + A_1 D_a^x\varphi + B_1\varphi,\ L_2(\psi) = (D_a^x)^2\psi + AD_a^x\psi + B\psi,$$

Ведём новую не известию функция $L_1(\varphi) = \psi$. Тогда уравнение (6) можем записать в виде

$$(D_a^x)^2\psi + AD_a^x\psi + B\psi = f, \qquad (7)$$

Таким образом в случае, когда коэффициенты дифференциального уравнение (4) с параметрами дифференциальных операторы $L_1$ и $L_2$ связаны формулы (5) , задача свелось к решение следующей расщепленной системы дифференциальных уравнений вторых порядков вида:

$$\begin{cases} L_1(\varphi) = \psi \\ L_2(\psi) = f \end{cases} \qquad (8)$$

Легко может видеть,[2], [3] что первому однородному уравнению системы (8) соответствует следующее характеристическое уравнение

$$\mu^2 + A_1\mu + B_1 = 0, \qquad (9)$$

а второму однородному уравнению системы (8) соответствует следующее характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + A\lambda + B = 0. \qquad (10)$$

Используем методику приведённой в [ 3 ], легко можно видеть, что если корни характеристическое уравнения (10) вещественные равными, решение второго уравнения системы (8) существует, тогда она представима виде

$$\Psi(x) = (x-a)^\lambda[c_1 + \ln(x-a)c_2] + \int_a^x \left(\frac{x-a}{t-a}\right)^\lambda ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right)\frac{f(t)dt}{t-a} \quad (11)$$

где $c_1, c_2$ производные постоянные $\lambda = \frac{A}{2}$ корни уравнение (10). Аналогично, если корни алгебраического уравнения (9) соответствующее первому уравнению системы (8) вещественные равными, тогда ему соответствует следующее решение.

$$\varphi(x) = (x-a)^\mu[c_3 + \ln(x-a)c_4] + \int_a^x \left(\frac{x-a}{t-a}\right)^\mu ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right)\frac{\psi(t)dt}{t-a} \quad (12)$$

где $c_3, c_4$ производные постоянные $\mu = \mu_1 = \mu_2 = -\frac{A_1}{2}$ корни алгебраическое уравнение (9).

Интегралы в правой части (11) сходится, при $\lambda > 0$, , если $f(\mathrm{t}) \in C\ (\overline{\Gamma}), f(a) = 0$ с асимптотическим поведением

$$f(t) = o\left[(t-a)^{\delta_1}\right], \delta_1 > \lambda.$$

Решение вид (12) существует при $\mu > 0$, если $\psi(\mathrm{t}) \in C(\overline{\Gamma})$, $\psi(a) = 0$ с асимптотический поведением

$$\psi(t) = o\left[(t-a)^{\delta_2}\right], \delta_2 > \mu.$$

Поставляя найденные значения $\psi(x)$ из (11) в (12), после вычисленные соответствующие интегралов, приходим к следующему равенству

$$\varphi(x) = (x-a)^\mu[c_3 + \ln(x-a)\, c_4] + \frac{(x-a)^\lambda}{(\lambda-\mu)^2}[c_1 + \ln(x-a)\, c_2] +$$

$$+\frac{1}{(\lambda-\mu)^2}\int_a^x\left[\left(\frac{x-a}{\tau-a}\right)^{\lambda}-\left(\frac{x-a}{\tau-a}\right)^{\mu}\right]ln\left(\frac{t-a}{\tau-a}\right)ln\left(\frac{x-a}{\tau-a}\right)\frac{f(\tau)}{\tau-a}d\tau \quad (14)$$

Таким образом доказано следующее утверждение

***Теорема 1.*** *Пусть в дифференциальном уравнение* $(4)$, *параметры* $E_1, E_2, E_3, E_4$ *с параметрами дифференциальных операторов* $L_1, L_2$ *связаны при помощи формулы* $(5)$ , *корни алгебраических уравнение* $(9)$

*и*$(10)$. $\lambda, \mu$- *являются вещественными равными положительными* $\lambda > \mu, f(x) \in C(\overline{\Gamma}), f(a) = 0,$ *с следующим асимптотическим поведением*

$$f(x) = o\left[(x-a)^{\delta_2}\right], \delta_2 > \lambda.$$

*Тогда, любой решение дифференциального уравнения* $(4)$ *из класса* $C(\overline{\Gamma})$ *даётся формулу* $(14)$**,** *где* $c_j, j = 1,2,3,4,$ *произвольные постоянные.*

Теперь допустим, что $\lambda < 0$ решение вид $(11)$ существует если $f(\mathrm{t}) \in C(\overline{\Gamma}), f(a) = 0$ с асимптотический поведением

$$f(t) = o[(t-a)^{\varepsilon}], \varepsilon > 0.$$

При $\mu < 0$ решение вид $(11)$ существует если $\psi(\mathrm{t}) \in C(\overline{\Gamma}),\ \psi(a) = 0$ с асимптотический поведением

$$\varphi(t) = o[(t-a)^{\varepsilon}], \varepsilon > 0.$$

Поставляя найденные значения $\psi(x)$ из $(11)$ в $(12)$, после вычисленные соответствующие интегралов, приходим к следующему равенству

$$\varphi(x) = (x-a)^{\mu}[c_3 + \ln(x-a)\,c_4] + \frac{(x-a)^{\lambda}}{(\lambda-\mu)^2}[c_1 + \ln(x-a)\,c_2] +$$

$$+\frac{1}{(\lambda-\mu)^2}\int_a^x\left[\left(\frac{\tau-a}{x-a}\right)^{|\lambda|}-\left(\frac{\tau-a}{x-a}\right)^{|\mu|}\right]ln\left(\frac{t-a}{\tau-a}\right)ln\left(\frac{x-a}{\tau-a}\right)\frac{f(\tau)}{\tau-a}d\tau \quad (15)$$

Таким образом в этом случае доказать следующее утверждение

***Теорема 2.*** *Пусть в дифференциальном уравнении* $(4)$ *параметры* $E_1, E_2, E_3, E_4$ *с параметрами дифференциальных операторов* $L_1, L_2$ *связаны при помощи формулы* $(5)$ *корни алгебраических уравнение* $(9)$

*и*$(10)$. $\lambda, \mu$*- являются вещественными равными и отрицательными* $f(x) \in C(\overline{\Gamma}), f(a) = 0,$ *с следующим асимптотическим поведением*

$$f(x) = o[(x-a)^{\varepsilon}], \varepsilon > 0 \ .$$

*Тогда любое решение дифференциального уравнения* $(4)$, *из класса* $C(\overline{\Gamma})$ *даётся формулу* $(15)$ **,** *где* $c_j, j = 1,2,3,4$ *- произвольные постоянные.*

Пусть $\lambda > 0$. Тогда, решение вид $(11)$ существует, если $f(\mathrm{t}) \in C(\overline{\Gamma})$, $f(a) = 0$ с асимптотический поведением:

$$f(t) = o\left[(t-a)^{\delta_3}\right], \delta_3 > \lambda.$$

При $\mu < 0$ решение вид $(12)$ существует, если $\psi(\mathrm{t}) \in C(\overline{\Gamma})$, $\psi(a) = 0$ с асимптотический поведением

$$\varphi(t) = o[(t-a)^{\varepsilon}], \varepsilon > 0.$$

Поставляя найденные значения $\psi(x)$ из $(12)$ в $(13)$, после выполнение некоторых операции приходим к следующему равенству

$$\varphi(x) = (x-a)^{\mu}[c_3 + \ln(x-a)\, c_4] + \frac{(x-a)^{\lambda}}{(\lambda-\mu)^2}[c_1 + \ln(x-a)\, c_2] +$$
$$+ \frac{1}{(\lambda-\mu)^2}\int_a^x \left[\left(\frac{x-a}{\tau-a}\right)^{\lambda} - \left(\frac{\tau-a}{x-a}\right)^{|\mu|}\right] ln\left(\frac{t-a}{\tau-a}\right) ln\left(\frac{x-a}{\tau-a}\right)\frac{f(\tau)}{\tau-a}d\tau \quad (16)$$

Таким образом, в этом случае доказано следующее утверждение

***Теорема 3.*** *Пусть в дифференциальном уравнении* $(4)$ *параметры* $E_1, E_2, E_3, E_4$ *с параметрами дифференциальных операторов* $L_1, L_2$ *связаны при помощи формулы* $(5)$, *корни алгебраического уравнения*

$(10)$ *вещественные, равными и положительные а корни алгебраического уравнении* $(9)$ *вещественные, разные и отрицательные*

$f(x) \in C(\overline{\Gamma}), f(a) = 0$ *со следующим асимптотическим поведением*

$$f(x)=o\left[(x-a)^{\delta_4}\right],\delta_4>\lambda$$

*Тогда, любое решение дифференциального уравнения* $(4)$ *из класса* $C(\overline{\Gamma})$ *даётся формулу* $(16)$**,** *где* $c_j, j=1,2,3,4$ *произвольные постоянные.*

Пусть $\lambda<0$. В этом случае решение вид $(11)$ существует если $f(\mathrm{t})\in C(\overline{\Gamma}), f(a)=0$ с асимптотический поведением

$$f(t)=o[(t-a)^{\varepsilon}],\varepsilon>0.$$

При $\mu>0$ решение вид $(12)$ существует если $\psi(\mathrm{t})\in C(\overline{\Gamma}),\ \psi(a)=0$ с асимптотический поведением

$$\varphi(t)=o\left[(t-a)^{\delta_5}\right],\delta_5>\mu.$$

Поставляя найденные значения $\psi(x)$ из $(11)$ в $(12)$, после вычисленные соответствующие интегралов, приходим к следующему равенству

$$\varphi(x)=(x-a)^{\mu}[c_3+\ln(x-a)\,c_4]+\frac{(x-a)^{\lambda}}{(\lambda-\mu)^2}[c_1+\ln(x-a)\,c_2]+$$

$$+\frac{1}{(\lambda-\mu)^2}\int_a^x\left[\left(\frac{\tau-a}{x-a}\right)^{|\lambda|}-\left(\frac{x-a}{\tau-a}\right)^{\mu}\right]ln\left(\frac{t-a}{\tau-a}\right)ln\left(\frac{x-a}{\tau-a}\right)\frac{f(\tau)}{\tau-a}d\tau \quad (17)$$

Таким образом, доказано следующее утверждение

***Теорема 4.*** *Пусть в дифференциальном уравнении* $(4)$ *параметры* $E_1,E_2,E_3,E_4$ *с параметрами дифференциальных операторов* $L_1,L_2$ *связаны при помощи формулы* $(5)$ *корни алгебраического уравнения* $(10)$.

$\mu_1,\mu_2$*- являются вещественными, равными и положительными, корни алгебраического уравнения* $(11)$ *являются вещественными равными отрицательными,* $f(x)\in C(\overline{\Gamma}), f(a)=0$ *со следующим асимптотическим поведением*

$$f(x)=o\left[(x-a)^{\delta_6}\right],\delta_6>\mu.$$

*Тогда, любое решение дифференциального уравнения* $(4)$, *из класса* $C(\overline{\Gamma})$ *даётся формулу* $(17)$**,** *где* $\left(c_j, j=1,2,3,4\right)$, *произвольные постоянные.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Rajabov N. Higher order ordinary differential equations with super singular points\\ Portion Differential Integral Equation 1999, Kluwer Academic Publisher. Print in the Nether Lands, p.347-358

2. Rajabov N. Introduction to ordinary differential equations with singular and super-singular coefficients, Dushanbe .1998, 160p

3. Раджабов Н. Интегральные уравнении типов Вольтера с фиксированными граничными и внутренними сингулярными и сверх сингулярными ядрами и их приложения. Душанбе 2007, «Деваштич» 220.с

4. Rajabov N. Volterra type integral equations with super- singular kernel\\ Functional analysis in interdisciplinary applications, Astana, Kazakhstan, October 2017, springs, Proceedings in Mathematics and statistics, Volume 216, p.333-346.

5. Rajabov N. New Methods for Volterra Type Integral Equation with Boundary singular point\\ In books «New Trends in Analysis and Interdisciplinary Applications » selected Contributions of the $10^{th}$ ISAAc. Congress, Moc. 2015.Rirkhauser, Springer International Publishing AG 2017, p.121-127.

6. Rajabov N. Well Posed Boundary Value Problems for New Classes of singular Integral Equation in Cylindrical Domal\\ Analysis and Partial Differential Equations, Perspective from Developing Countries, Springer Nature, Switzerland 2018 AG, 25p .

7. Н.Раджабов Интегральные представления и граничные задачи для некоторых дифференциальных уравнений с сингулярной линией или сингулярными поверхностями. Часть 4, Изд. ТГУ, Душанбе 1985, 147с.

8. N.Radjabov. An Introduction to the theory of partial differential equations with super – singular coefficients, Tehran 1997, 230p.

9. nusrat38@mail.ru

## ДАР БОРАИ ЯК СИНФИ МУОДИЛАҲОИ ДИФФЕРЕНСИАЛИИ ОДДИИ ТАНАЗУЛЁБАНДАИ ДАРТИБИ ЧОР

Дар мақола барои як синфи муодилаҳои дифференсиалии оддии тагазулёбандаи тартиби чор, вобаста аз аломатӣ решаҳои ду муодилаҳои характеристикии тартиби ду тасвирҳои интегралӣ ёфта шудааст.

Аператори дифференсиалии таназулёбнадаи тартиби (4)-ро чун ҳосили зарби ду аператори дифференсиалии таназулёбандаи тартиби ду тасвир кардан мумкин аст. Агар коэфисиентҳои муодилаи дифференсиалӣ бо коэфисиентҳои аператори дифференсиалии $L_1$ ва $L_2$ бо формулаи (5) вобастагӣ дошта бошанд. Тасвирҳои интегралии ҳосилшуда аз решаҳои муодилаи характеристикӣ (9) ва (10) вобастаги дорад. Дар мақола решаҳои муодилаи характеристикӣ (9) ва (10) хақики ва баробар ёфта шудааст.

Натиҷаҳо ба намуди 1-4 оварда шудаанд.

**Калидвожаҳо:** муодилаҳои дифференсиалии оддии тагазулёбанда, тасвирҳои интегралӣ, ҳалхои бисёршакла.

## TO THEORY ONE CLASS OF DEGENERATION FOURTH ORDER ORDIRARY DIFFERENTIAL EQUATION.

In this work, we investigating one class of degenerating fourth order ordinary differential equation. Obtained integral representation manifold solution in depend of the roots two second order algebraic equation.

We may be differential operator fourth order, represented in composition two second ordered degeneration differential operator, if coefficient consideration operator with coefficient second order, beet win connection on peg. Obtained integral representation connection from the roots of characteristic second order algebraic equation (9) and (10).

In the case, when the roots of algebraic equation (9) and (10) real, different, integral representation is found.

**Key words:** conjugate differential equation, integral representation, manifold solution.

**Маълумот дар бораи муаллиф:** Раҷабов Нусрат–– Донишгоҳи миллии Тоҷикиктон, доктори илмои физика математика, профессори кафедраи таҳлили математикӣ ва назарияи функсияҳо и ДМТ. **Адрес:** 734025, Ҷумҳурии Тоҷикистон, ш. Душанбе, хиёбони Рудаки 17. Телефон: 907 75 51 25.

***Сведения об авторах: Раджабов Нусрат*** – Таджикский национальный университет, доктор физико математических наук, профессор кафедры математического анализа и теории функций. **Адрес:** 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, проспект Рудаки 17. **E-mail:** nusrat38@mail.ru. **Телефон:** 907 75 51 25.

***Information about the authors:*** Rajabov Nusrat-Tajik national University, doctor of physics and mathematics, Professor of the Department of mathematical analysis and theory of functions. Address: 734025, Republic of Tajikistan, Dushanbe, Rudaki Avenue 17. E-mail: nusrat38@mail.ru. Phone: 907 75 51 25.

**Маълумот дар бораи муаллиф:** Қодиров Далер Абдушукурович-– Донишгоҳи миллии Тоҷикиктон, ассистенти кафедраи таҳлили математикӣ ва назарияи функсияҳо и ДМТ. **Адрес:** 734025, Ҷумҳурии Тоҷикистон, ш. Душанбе, хиёбони Рудаки 17. Телефон: 981053898.

***Сведения об авторах: Қодиров Далер Абдушукурович*** – Таджикский национальный университет, асситент кафедры математического анализа и теории функций. **Адрес:** 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, проспект Рудаки 17. **E-mail:** daler-kodirov@bk.ru. **Телефон:** 981053898.

***Information about the authors:*** Kodirov Daler Abdushukurovich-Tajik national University, assistant mathematical analysis and theory of functions. Address: 734025, Republic of Tajikistan, Dushanbe, Rudaki Avenue 17. E-mail: daler-kodirov@bk.ru. Phone: 981053898.