УДК 517.956

Шоймкулов Б.М., к.ф.-м.н., доцент кафедры математического анализа и теории функции Таджикского национального университета (Душанбе)

ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННАЯ СИСТЕМА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ОДНОЙ СВЕРХСИНГУЛЯРНОЙ И ОДНОЙ СИНГУЛЯРНОЙ ПЛОСКОСТЬЮ В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Пусть область D ограниченно плоскостями $\Gamma_1 = \{y = x, 0 < x < a_0, z = 0\}$, $\Gamma_2 = \{0 < y < b_0, x = 0, z = 0\}$ $\Gamma_3 = \{x = z, 0 < z < c_0, y = 0$.

В области D рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{a_1(x,y,z)}{(x-y)^{\alpha}} u + \dfrac{f_1(x,y,z)}{(x-y)^{\alpha}}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{a_2(x,y,z)}{x-y} u + \dfrac{f_2(x,y,z)}{x-y}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial z} = \dfrac{a_3(x,y,z)}{x-y} u + \dfrac{f_3(x,y,z)}{x-y}, \end{cases} \tag{1}$$

где $\alpha > 1$, $a_i(x,y,z), f_i(x,y,z) (1 \le i \le 3) -$ заданные функции, $u(x,y,z) \in C^1(D)$ - искомая функция.

Для нахождение общего решения переопределенных систем дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка со сверхсингулярной точкой и со сверхсингулярной плоскостью посвящено монография академика АН РТ Раджабова Н. [1, 206].

Используя результаты монографии Раджабова Н. Найдено общее решение системы (1) в явном виде через одну произвольную постоянную.

Предположим, что коэффициенты и правые части системы (1) удовлетворяют условиям совместности:

$$\begin{gathered} a_1(x,y,z), a_3(x,y,z), f_1(x,y,z), f_3(x,y,z) \in C'_y(\overline{D}), \\ a_2(x,y,z), a_3(x,y,z), f_2(x,y,z), f_3(x,y,z) \in C'_x(\overline{D}), \\ a_1(x,y,z), a_2(x,y,z), f_1(x,y,z), f_2(x,y,z) \in C'_z(\overline{D}), \end{gathered} \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big[\frac{a_2(x,y,z)}{x-y}\Big] = \frac{\partial}{\partial y}\Big[\frac{a_1(x,y,z)}{(x-y)^{\alpha}}\Big], \tag{3}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big[\frac{a_3(x,y,z)}{x-y}\Big] = \frac{\partial}{\partial z}\Big[\frac{a_1(x,y,z)}{(x-y)^{\alpha}}\Big], \tag{4}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\Big[\frac{a_3(x,y,z)}{x-y}\Big] = \frac{\partial}{\partial z}\Big[\frac{a_2(x,y,z)}{x-y}\Big], \tag{5}$$

$$\begin{gathered} (x-y)^{\alpha+1} \frac{\partial}{\partial x}\Big[\frac{f_2(x,y,z)}{x-y}\Big] + a_2(x,y,z) f_1(x,y,z) = \\ = (x-y)^{\alpha+1} \frac{\partial}{\partial y}\Big[\frac{f_1(x,y,z)}{(x-y)^{\alpha}}\Big] + a_1(x,y,z) f_2(x,y,z), \end{gathered} \tag{6}$$

$$(x-y)^{\alpha+1}\frac{\partial}{\partial x}[\frac{f_3(x,y,z)}{x-y}]+a_3(x,y,z)f_1(x,y,z)=$$
$$=(x-y)^{\alpha+1}\frac{\partial}{\partial z}[\frac{f_1(x,y,z)}{(x-y)^{\alpha}}]+a_1(x,y,z)f_3(x,y,z), \tag{7}$$

$$(x-y)^2\frac{\partial}{\partial y}[\frac{f_3(x,y,z)}{x-y}]+a_3(x,y,z)f_2(x,y,z)=$$
$$=(x-y)^2\frac{\partial}{\partial z}[\frac{f_2(x,y,z)}{x-y}]+a_2(x,y,z)f_3(x,y,z). \tag{8}$$

При выполнении условии совместности интегрирование системы (1) начнём со второго уравнения. Однородной уравнении имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{a_2(x,y,z)}{x-y}u$$

преобразуя имеем

$$\frac{\partial \ln u}{\partial y}=\frac{a_2(x,y,z)}{x-y}. \tag{9}$$

Интегрируя получим

$$\ln u(x,y,z)=\int_0^y\frac{a_2(x,\tau,z)-a_2(0,0,0)}{x-\tau}ds-a_2(0,0,0)\ln|x-y|+\psi_1(x,z) \tag{10}$$

отсюда

$$u(x,y,z)=\exp(\omega_1(x,y,z))(x-y)^{-a_2(0,0,0)}\psi_1(x,z), \tag{11}$$

где $\omega_1(x,y,z)=\int_0^y\frac{a_3(x,\tau,z)-a_2(0,0,0)}{x-\tau}d\tau,$ $\psi_1(x,z)-$ произвольно – дифференцируемая функция переменных x и z.

Предпологая, что в равенстве (11) функция $\psi_1(x,z)$ зависит от переменной y, равенство (11) дифференцируем

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\exp(\omega_1(x,y,z))\frac{a_2(x,y,z)-a_2(0,0,0)}{x-y}(x-y)^{-a_2(0,0,0)}\psi_1(x,z)+$$
$$+\frac{a_2(0,0,0)}{x-y}(x-y)^{-a_2(0,0,0)}\psi_1(x,z)+\exp(\omega_1(x,y,z))(x-y)^{-a_2(0,0,0)}\psi'_1(x,z)].$$

Подставим во второй уравнение системы (1)

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\exp(\omega_1(x,y,z))\frac{a_2(x,y,z)-a_2(0,0,0)}{x-y}(x-y)^{-a_2(0,0,0)}\psi_1(x,z)+$$
$$+\frac{a_2(0,0,0)}{x-y}(x-y)^{-a_2(0,0,0)}\psi_1(x,z)+\exp(\omega_1(x,y,z))(x-y)^{-a_2(0,0,0)}\psi'_1(x,z)]=$$
$$=\frac{a_2(x,y,z)}{x-y}\exp(\omega_1(x,y,z))(x-y)^{-a_2(0,0,0)}\psi_1(x,z)+\frac{f_2(x,y,z)}{x-y}.$$

Отсюда получим дифференциальной уравнение вида

$$\psi'_1(x,z)=\frac{f_2(x,y,z)}{(x-y)^{1-a_2(0,0,0)}}\exp(-\omega_1(x,y,z)).$$

Интегрируя имеем

$$\psi_1(x,z)=\int_0^y \frac{f_2(x,\tau,y)}{(x-\tau)^{1-a_2(0,0,0)}}\exp(-\omega_1(x,\tau,y))+\psi_2(x,z), \tag{12}$$

где $\psi_2(x,z)$ – произвольно дифференцируемая функция переменных x и z. Найденные значение $\psi_1(x,z)$ подставим в равенство (11), то есть общее решение второе уравнение системы (1) имеет вид

$$\begin{gathered} u(x,y,z)=\exp(\omega_1(x,y,z))(x-y)^{-a_2(0,0,0)}[\psi_2(x,z)+ \\ +\int_0^y \frac{f_2(x,\tau,z)}{(x-\tau)^{1-a_2(0,0,0)}}\exp(-\omega_1(x,\tau,z))\,d\tau]. \end{gathered} \tag{13}$$

Предположим, что функции $a_2(x,y,z)$ и $f_2(x,y,z)$ удовлетворяют условии:

1). Функция $a_2(x,y,z)$ в окрестности точек плоскости $x=y$ удовлетворяет условию типа Гёлдера

$$|a_2(x,y,z)-a_2(0,0,0)|\le H_1((x-y)^{\gamma_1}), H_1=const>0, \gamma_1>0. \tag{14}$$

2). Функция $f_2(x,y,z)$ в окрестности точек плоскости $x=y$ обращается в нуль с асимптотической формулой

$$f_2(x,y,z)=o((x-y)^{\gamma_2}), \gamma_2>-a_2(0,0,0). \tag{15}$$

3). $a_2(0,0,0)<0$.

Тогда интегралы равенстоо (13) сходятся.

Тода, дифференцируя (13) по x будем иметь

$$\begin{gathered} \frac{\partial u}{\partial x}=\exp(\omega_1(x,y,z))[\frac{\partial\omega_1(x,y,z)}{\partial x}(x-y)^{-a_2(0,0,0)}-\frac{a_2(0,0,0)}{x-y}(x-y)^{-a_2(0,0,0)}][\psi_2(x,z)+ \\ +\int_0^y \frac{f_2(x,\tau,z)}{(x-\tau)^{1-a_2(0,0,0)}}\exp(-\omega_1(x,\tau,z))d\tau]+\exp(\omega_1(x,y,z))(x-y)^{-a_2(0,0,0)}\{\psi'_2(x,z)+ \\ +\int_0^y \frac{\partial}{\partial x}[\frac{f_2(x,\tau,z)}{(x-\tau)^{1-a_2(0,0,0)}}\exp(-\omega_1(x,\tau,z))]d\tau\}. \end{gathered}$$

Подставим значение $\frac{\partial u}{\partial x}$ в первой уравнении систему (1)

$$\begin{gathered} \exp(\omega_1(x,y,z))(x-y)^{-a_2(0,0,0)}[\frac{\partial\omega_1(x,y,z)}{\partial x}-\frac{a_2(0,0,0)}{x-y}][\psi_2(x,z)+ \\ +\int_0^y \frac{f_2(x,\tau,z)}{(x-\tau)^{1-a_2(0,0,0)}}\exp(-\omega_1(x,\tau,z))d\tau]+\exp(\omega_1(x,y,z))(x-y)^{-a_2(0,0,0)}\{\psi'_2(x,z)+ \\ +\int_0^y \frac{\partial}{\partial x}[\frac{f_2(x,\tau,z)}{(x-\tau)^{1-a_2(0,0,0)}}\exp(-\omega_1(x,\tau,z))]d\tau\}= \\ =\frac{a_1(x,y,z)}{(x-y)^{\alpha}}\exp(\omega_1(x,y,z))(x-y)^{-a_2(0,0,0)}[\psi_2(x,z)+ \\ +\int_0^y \frac{f_2(x,\tau,z)}{(x-\tau)^{1-a_2(0,0,0)}}\exp(-\omega_1(x,\tau,z))d\tau]+\frac{f_1(x,y,z)}{(x-y)^{\alpha}}. \end{gathered} \tag{16}$$

Разделяя равенство (16) на $\exp(\omega_1(x,y,z))(x-y)^{-a_2(0,0,0)}$ получим

$$\psi'_2(x,z)=[\frac{a_1(x,y,z)}{(x-y)^{\alpha}}-\frac{\partial\omega_1(x,y,z)}{\partial x}+\frac{a_2(0,0,0)}{x-y}][\psi_2(x,z)+$$
$$+\int_0^y\frac{f_2(x,\tau,z)}{(x-\tau)^{1-a_2(0,0,0)}}\exp(-\omega_1(x,\tau,z))d\tau]+\frac{f_1(x,y,z)}{(x-y)^{\alpha-a_2(0,0,0)}}\exp(-\omega_1(x,y,z))- \qquad (17)$$
$$-\int_0^y\frac{\partial}{\partial x}[\frac{f_2(x,\tau,z)}{(x-\tau)^{1-a_2(0,0,0)}}\exp(-\omega_1(x,\tau,z))]d\tau.$$

Правая часть этого равенства зависит от переменных x и z а левая часть зависит от перемнных x,z и y. Поэтому

$$\frac{\partial}{\partial y}\{[\frac{a_1(x,y,z)}{(x-y)^{\alpha}}-\frac{\partial\omega_1(x,y,z)}{\partial x}+\frac{a_2(0,0,0)}{x-y}][\psi_2(x,z)+$$
$$+\int_0^y\frac{f_2(x,\tau,z)}{(x-\tau)^{1-a_2(0,0,0)}}\exp(-\omega_1(x,\tau,z))d\tau]+\frac{f_1(x,y,z)}{(x-y)^{\alpha-a_2(0,0,0)}}\exp(-\omega_1(x,y,z))-$$
$$-\int_0^y\frac{\partial}{\partial x}[\frac{f_2(x,\tau,z)}{(x-\tau)^{1-a_2(0,0,0)}}\exp(-\omega_1(x,\tau,z))]d\tau\}=0.$$

Отсюда получим

$$\frac{\partial}{\partial x}[\frac{f_2(x,y,z)}{(x-y)^{1-a_2(0,0,0)}}\exp(-\omega_1(x,y,z))]=$$
$$=\frac{\partial}{\partial y}\{[\frac{a_1(x,y,z)}{(x-y)^{\alpha}}-\frac{\partial\omega_1(x,y,z)}{\partial x}+\frac{a_2(0,0,0)}{x-y}][\psi_2(x,z)+ \qquad (18)$$
$$+\int_0^y\frac{f_2(x,\tau,z)}{(x-\tau)^{1-a_2(0,0,0)}}\exp(-\omega_1(x,\tau,z))d\tau]+\frac{f_1(x,y,z)}{(x-y)^{\alpha-a_2(0,0,0)}}\exp(-\omega_1(x,y,z))\}$$

эквивалентной условии совместности системы (1).

Используя условии (18) находим дифференциальной уравнении в частных производных

$$\frac{\partial\psi_2(x,z)}{\partial x}=(\frac{a_1(x,0,z)}{x^{\alpha}}+\frac{a_2(0,0,0)}{x})\psi_2(x,z)+\frac{f_1(x,0,z)}{x^{\alpha-a_2(0,0,0)}}. \qquad (19)$$

Далее, равенство (13) дифференцируем по переменной z .

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\exp(\omega_1(x,y,z))\frac{\partial\omega_1(x,y,z)}{\partial z}(x-y)^{-a_2(0,0,0)}[\psi_2(x,z)+$$
$$+\int_0^y\frac{f_2(x,\tau,z)}{(x-\tau)^{1-a_2(0,0,0)}}\exp(-\omega_1(x,\tau,z))\,d\tau]+\exp(\omega_1(x,y,z))(x-y)^{-a_2(0,0,0)}[\psi'_2(x,z)+$$
$$+\int_0^z\frac{\partial}{\partial z}[\frac{f_2(x,\tau,z)}{(x-\tau)^{1-a_2(0,0,0)}}\exp(-\omega_1(x,\tau,z))]d\tau.$$

Значение $\frac{\partial u}{\partial z}$ и $u(x,y,z)$ подставляем в третьей уравнение системы (1)

$$\exp(\omega_1(x,y,z))\frac{\partial\omega_1(x,y,z)}{\partial z}(x-y)^{-a_2(0,0,0)}[\psi_2(x,z)+$$

$$\int_0^y \frac{f_2(x,\tau,z)}{(x-\tau)^{1-a_2(0,0,0)}}\exp(-\omega_1(x,\tau,z))\,d\tau] + \exp(\omega_1(x,y,z))(x-y)^{-a_2(0,0,0)}[\psi'_2(x,z) +$$

$$+\int_0^z \frac{\partial}{\partial z}[\frac{f_2(x,\tau,z)}{(x-\tau)^{1-a_2(0,0,0)}}\exp(-\omega_1(x,\tau,z))]d\tau =$$

$$= \frac{a_3(x,y,z)}{x-y}\exp(\omega_1(x,y,z))(x-y)^{-a_2(0,0,0)}[\psi_2(x,z) + \tag{20}$$

$$+\int_0^y \frac{f_2(x,\tau,z)}{(x-\tau)^{1-a_2(0,0,0)}}\exp(-\omega_1(x,\tau,z))\,d\tau] + \frac{f_3(x,y,z)}{x-y}.$$

Равенствос (20) разделяя на $\exp(\omega_1(x,y,z))(x-y)^{-a_2(0,0,0)}$ имеем

$$\frac{\partial\psi_2(x,z)}{\partial z} = (\frac{a_3(x,y,z)}{x-y} - \frac{\partial\omega_1(x,y,z)}{\partial z})[\psi_2(x,z) +$$

$$+\int_0^z \frac{f_2(x,\tau,z)}{(x-\tau)^{1-a_2(0,0,0)}}\exp(-\omega_1(x,\tau,z))d\tau] + \tag{21}$$

$$+\frac{f_3(x,y,z)}{(x-y)^{1-a_2(0,0,0)}}\exp(-\omega_1(x,y,z)) -$$

$$-\int_0^y \frac{\partial}{\partial z}[\frac{f_2(x,\tau,z)}{(x-\tau)^{1-a_2(0,0,0)}}\exp(-\omega_3(x,\tau,z)]d\tau.$$

Правая часть равенство (21) зависит от переменных x и z а левая часть от переменных x , z и y . Для того чтобы равенство (21) имело место

$$\frac{\partial}{\partial y}\{(\frac{a_3(x,y,z)}{x-y} - \frac{\partial\omega_1(x,y,z)}{\partial z})[\psi_2(x,z) +$$

$$+\int_0^z \frac{f_2(x,\tau,z)}{(x-\tau)^{1-a_2(0,0,0)}}\exp(-\omega_1(x,\tau,z))d\tau] + \tag{22}$$

$$+\frac{f_3(x,y,z)}{(x-y)^{1-a_2(0,0,0)}}\exp(-\omega_1(x,y,z)) -$$

$$-\int_0^y \frac{\partial}{\partial z}[\frac{f_2(x,\tau,z)}{(x-\tau)^{1-a_2(0,0,0)}}\exp(-\omega_3(x,\tau,z)]d\tau\} = 0.$$

Отсюда получим условии

$$\frac{\partial}{\partial z}[\frac{f_2(x,y,z)}{(x-y)^{1-a_2(0,0,0)}}\exp(-\omega_3(x,y,z))\} = \frac{\partial}{\partial y}\{(\frac{a_3(x,y,z)}{x-y} -$$

$$-\frac{\partial\omega_1(x,y,z)}{\partial z})[\psi_2(x,z) + \int_0^z \frac{f_2(x,\tau,z)}{(x-\tau)^{1-a_2(0,0,0)}}\exp(-\omega_1(x,\tau,z))d\tau] + \tag{23}$$

$$+\frac{f_3(x,y,z)}{(x-y)^{1-a_2(0,0,0)}}\exp(-\omega_1(x,y,z))\}$$

эквивалентой условиям совместности системы (1). Из этой условии находим

$$\frac{\partial\psi_2(x,z)}{\partial z} = \frac{a_3(x,0,z)}{x}\psi_2(x,z) + \frac{f_3(x,0,z)}{x^{1-a_2(0,0,0)}}. \tag{24}$$

Далее, из дифференциальных уравнения (24) и (19) составим переопределенных систем дифференциальных уравнений в частных производных

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \psi_2(x,z)}{\partial x} = (\dfrac{a_1(x,0,z)}{x^\alpha} + \dfrac{a_2(0,0,0)}{x})\psi_2(x,z) + \dfrac{f_1(x,0,z)}{x^{\alpha - a_2(0,0,0)}}, \\ \dfrac{\partial \psi_2(x,z)}{\partial z} = \dfrac{a_3(x,0,z)}{x}\psi_2(x,z) + \dfrac{f_3(x,0,z)}{x^{1-a_2(0,0,0)}}. \end{cases} \qquad (25)$$

Для нахождение общее решение системы (25), сначало интегрируем второе уравниния. Преобразуя однородной уравнение второе уравнение системы (25), имеем

$$\frac{\partial \ln \psi_2(x,z)}{\partial z} = \frac{a_3(x,0,z)}{x}.$$

Интегрируя по переменной y

$$\ln \psi_2(x,z) = \frac{1}{x}\int_0^z a_3(x,0,s)ds + \psi_1(x),$$

после, получим

$$\psi_2(x,z) = \exp(\omega_2(x,0,z))\psi_1(x), \qquad (26)$$

где $\omega_2(x,0,z) = \int_0^z \frac{a_3(x,0,s)}{x}ds$, $\psi_1(x) -$ произвольно-дифференцируемая функция переменной x.

Дифференцируя по переменной z

$$\frac{\partial \psi_2(x,z)}{\partial z} = \exp(\omega_2(x,0,z))\frac{a_3(x,0,z)}{x}\psi_1(x) + \exp(\omega_2(x,0,z))\psi'_1(x).$$

Используя значение $\frac{\partial \psi_2(x,z)}{\partial z}$ приходим

$$\frac{\partial \psi_2(x,z)}{\partial z} = \exp(\omega_2(x,0,z))\frac{a_3(x,0,z)}{x}\psi_1(x) + \exp(\omega_2(x,0,z))\psi'_1(x) =$$
$$= \frac{a_3(x,0,z)}{x}\exp(\omega_2(x,0,z))\psi_1(x) + \frac{f_3(x,0,z)}{x^{1-a_2(0,0,0)}}.$$

Разделяя на $\exp(\omega_2(x,0,z))$ получим дифференциальной уравнении

$$\psi'_1(x) = \frac{f_3(x,0,z)}{x^{1-a_2(0,0,0)}}\exp(-\omega_2(x,0,z)). \qquad (27)$$

Интегрируем по переменной z

$$\psi_1(x) = \int_0^z \frac{f_3(x,0,s)}{x^{1-a_2(0,0,0)}}\exp(-\omega_2(x,0,s)ds + \psi_2(x). \qquad (28)$$

Значение $\psi_1(x)$ подставляя в (26) получим общее решение второе уравнение системы (25) в виде

$$\psi_2(x,z) = \exp(\omega_2(x,0,z))[\psi_2(x) + \int_0^z \frac{f_3(x,0,s)}{x^{1-a_2(0,0,0)}}\exp(-\omega_2(x,0,s)ds]. \qquad (29)$$

Далее, дифференцируя $\psi_2(x,z)$ по переменной x

$$\frac{\partial\psi_2(x,z)}{\partial x}=[\exp(\omega_2(x,0,z))\frac{\partial\omega_2(x,0,z)}{\partial x}[\psi_2(x)+\int_0^z\frac{f_2(x,0,s)}{x^{1-a_2(0,0,0)}}\exp(-\omega_2(x,0,s))ds]+$$
$$+\exp(\omega_2(x,0,z))\{\psi'_2(x)+\int_0^z\frac{\partial}{\partial x}[\frac{f_2(x,0,s)}{x^{1-a_2(0,0,0)}}\exp(-\omega_2(x,0,s))]ds\}$$

подставим в первой уравнение системы (25)

$$[\exp(\omega_2(x,0,z))\frac{\partial\omega_2(x,0,z)}{\partial x}[\psi_2(x)+\int_0^z\frac{f_2(x,0,s)}{x^{1-a_2(0,0,0)}}\exp(-\omega_2(x,0,s))ds]+$$
$$+\exp(\omega_2(x,0,z))\{\psi'_2(x)+\int_0^z\frac{\partial}{\partial x}[\frac{f_2(x,0,s)}{x^{1-a_2(0,0,0)}}\exp(-\omega_2(x,0,s))]ds\}=$$
$$=(\frac{a_1(x,0,s)}{x^\alpha}+\frac{a_2(0,0,0)}{x})\exp(\omega_2(x,0,z))[\psi_2(x)+\int_0^z\frac{f_2(x,0,s)}{x^{1-a_2(0,0,0)}}\exp(-\omega_2(x,0,s))ds]+$$
$$+\frac{f_1(x,0,z)}{x^{\alpha-a_2(0,0,0)}}.$$

Разделяя на $\exp(\omega_2(x,0,z))$ получим

$$\frac{d\psi_2(x)}{dx}=(\frac{a_1(x,0,s)}{x^\alpha}+\frac{a_2(0,0,0)}{x}-\frac{\partial\omega_2(x,0,z)}{\partial x})[\psi_2(x)+$$
$$+\int_0^z\frac{f_2(x,0,s)}{x^{1-a_2(0,0,0)}}\exp(-\omega_2(x,0,s))ds]+\frac{f_1(x,0,z)}{x^{\alpha-a_2(0,0,0)}}\exp(-\omega_2(x,0,z))- \tag{30}$$
$$-\int_0^z\frac{\partial}{\partial x}[\frac{f_3(x,0,s)}{x^{1-a_2(0,0,0)}}\exp(-\omega_2(x,0,s))]ds.$$

В равенстве (30) правая часть зависит от переменной x а левая часть зависит от переменных x и z, поэтому получим

$$\frac{\partial}{\partial z}\{(\frac{a_1(x,0,s)}{x^\alpha}+\frac{a_2(0,0,0)}{x}-\frac{\partial\omega_2(x,0,z)}{\partial x})[\psi_2(x)+$$
$$+\int_0^z\frac{f_2(x,0,s)}{x^{1-a_2(0,0,0)}}\exp(-\omega_2(x,0,s))ds]+\frac{f_1(x,0,z)}{x^{\alpha-a_2(0,0,0)}}\exp(-\omega_2(x,0,z))-$$
$$-\int_0^z\frac{\partial}{\partial x}[\frac{f_3(x,0,s)}{x^{1-a_2(0,0,0)}}\exp(-\omega_2(x,0,s))]ds\}=0.$$

Отсюда

$$\frac{\partial}{\partial x}[\frac{f_3(x,0,z)}{x^{1-a_2(0,0,0)}}\exp(-\omega_2(x,0,z))=\frac{\partial}{\partial z}\{(\frac{a_1(x,0,z)}{x^\alpha}+\frac{a_2(0,0,0)}{x}-$$
$$-\frac{\partial\omega_2(x,0,z)}{\partial x})[\psi_2(x)+\int_0^z\frac{f_2(x,0,s)}{x^{1-a_2(0,0,0)}}\exp(-\omega_2(x,0,s))ds]+ \tag{31}$$
$$+\frac{f_1(x,0,z)}{x^{\alpha-a_2(0,0,0)}}\exp(-\omega_2(x,0,z))\}.$$

Учытивая условии (31) из равенство (30) получим

$$\frac{d\psi_2(x)}{dz}=(\frac{a_1(x,0,0)}{x^\alpha}+\frac{a_2(0,0,0)}{x})\psi_2(x)+\frac{f_1(x,0,0)}{x^{\alpha-a_2(0,0,0)}}. \tag{32}$$

Соответствующей однородной уравнение имееть вид

$$\frac{d\psi_2(x)}{dx}=(\frac{a_1(x,0,0)}{x^\alpha}+\frac{a_2(0,0,0)}{x})\psi_2(x).$$

Преобразуя

$$\frac{d\ln\psi_2(x)}{dx}=\frac{a_1(x,0,0)}{x^\alpha}+\frac{a_2(0,0,0)}{x}$$

после, интегрирования имеем

$$\ln\psi_2(x)=\int_0^x\frac{a_1(t,0,0)-a_1(0,0,0)}{t^\alpha}dt-\frac{a_1(0,0,0)}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}}+a_2(0,0,0))\ln|x|+c_1.$$

Или

$$\psi_2(x)=\exp(\omega_3(x,0,0)-a_1(0,0,0)\omega_3^\alpha(x,0,0))x^{a_2(0,0,0)}c_1 \tag{33}$$

где $\omega_3(x,0,0)=\int_0^x\frac{a_1(t,0,0)-a_1(0,0,0)}{t^\alpha}dt,\quad \omega_3^\alpha(x,0,0)=\frac{1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}}$ и c_1 - произвольная постоянная.

Равенство (33) дифференцируя, после подставляем в (32)

$$\exp(\omega_3(x,0,0)-a_1(0,0,0)\omega_3^\alpha(x,0))[\frac{a_1(x,0,0)}{x^\alpha}+$$
$$+\frac{a_2(0,0,0)}{x}x^{a_2(0,0,0)}c_1+x^{a_2(0,0,0)}c'_1]=(\frac{a_1(x,0,0)}{x^\alpha}+\frac{a_2(0,0,0)}{x})\exp(\omega_3(x,0,0)-$$
$$-a_1(0,0,0)\omega_3^\alpha(x,0,0))x^{a_2(0,0,0)}c_1+\frac{f_1(x,0,0)}{x^{\alpha-a_2(0,0,0)}}.$$

Разделяя на $\exp(\omega_3(x,0,0)-a_1(0,0,0)\omega_3^\alpha(x,0))$ получим дифференциальной уравнении

$$c'_1=\frac{f_1(x,0,0)}{x^{\alpha-a_2(0,0,0)}}\exp(-\omega_3(x,0,0)+a_1(0,0,0)\omega_3^\alpha(x,0,0))$$

интегрируя имеем

$$c_1=\int_0^x\frac{f_1(t,0,0)}{t^{\alpha-a_2(0,0,0)}}\exp(-\omega_3(t,0,0)+a_1(0,0,0)\omega_3^\alpha(t,0,0))dt+c. \tag{34}$$

Значение c_1 подставляем в равенство (33)

$$\psi_2(x)=\exp(\omega_3(x,0,0)-a_1(0,0,0)\omega_3^\alpha(x,0,0))x^{a_2(0,0,0)}[c+$$
$$+\int_0^x\frac{f_1(t,0,0)}{t^{\alpha-a_2(0,0,0)}}\exp(-\omega_3(t,0,0)+a_1(0,0,0)\omega_3^\alpha(t,0,0))dt]. \tag{35}$$

Учытивая $\psi_2(x)$ значение $\psi_2(x,z)$ находим в виде

$$\psi_2(x,z)=\exp(\omega_2(x,0,z))\{\exp(\omega_3(x,0,0)-a_1(0,0,0)\omega_3^\alpha(x,0,0))x^{a_2(0,0,0)}[c+$$
$$+\int_0^x\frac{f_1(t,0,0)}{t^{\alpha-a_2(0,0,0)}}\exp(-\omega_3(t,0,0)+a_1(0,0,0)\omega_3^\alpha(t,0,0))dt]+\int_0^z\frac{f_3(x,0,s)}{x^{1-a_2(0,0,0)}}\exp(-\omega_2(x,0,s)ds\}. \tag{36}$$

Таким образом, общее решение системы (1) находим в виде

$$u(x,y,z)=\exp(\omega_1(x,y,z))(x-y)^{-a_2(0,0,0)}\{\exp(\omega_2(x,0,z))[\exp(\omega_3(x,0,0)-$$

$$-a_1(0,0,0)\omega_3^{\alpha}(x,0,0))x^{a_2(0,0,0)}(c+\int_0^x \frac{f_1(t,0,0)}{t^{\alpha-a_2(0,0,0)}}\exp(-\omega_3(t,0,0)+a_1(0,0,0)\omega_3^{\alpha}(t,0,0))dt)+ \quad (37)$$

$$+\int_0^z \frac{f_3(x,0,s)}{x^{1-a_2(0,0,0)}}\exp(-\omega_2(x,0,s)ds]+\int_0^y \frac{f_2(x,\tau,z)}{(x-\tau)^{1-a_2(0,0,0)}}\exp(-\omega_1(x,\tau,z))\,d\tau\}.$$

Теорема. *Пусть коэффициенты и правые часты системы (1) удовлетворяют условям (2),(3),(4),(5),(6),(7),(8),(14),(15), (18). Функция* $a_1(x,0,0)$ *в окрестности точек* $x=0$ *удовлетворяет условии типа Гёлдера*

$$|a_1(x,0,0)-a_1(0,0,0)|\le H_2((x)^{\gamma_3}), H_2=const>0, \gamma_3>\alpha-1.$$

Функция $f_1(x,0,0)$ *в окрестности точек* $x=0$ *определяется с помощью асимптотической формулой*

$$f_1(x,0,0)=0(x^{\gamma_4}), \gamma_4>\alpha-a_2(0,0,0)-1.$$

$a_1(0,0,0)>0$, $a_2(0,0,0)<0$. *Тогда общее решение системы (1) из класса* $C^1(D)$ *представимо в виде (37), где* c *-произвольная постоянная*

Заметим, что при выполнении всех условии теоремы общеее решение вида (37) ограниченно.

Литература

1. Раджабов Н. Интегральные представления и граничные задачи для некоторых дифференциальных уравнений с сингулярной линией или сингулярными поверхностями / Н.Раджабов // Душанбе, изд. ТГУ, ч. № I, 1980.- 126 с., ч. № II, 1981.- 170 с., ч. № III.1982.- 170 с.
2. Раджабов Н. Введение в теорию дифференциальных уравнений в частных производных со сверхсингулярными коэффициентами / Н.Раджабов // Душанбе 1992 (учебное пособие по спецкурсу), изд. ТГУ.- 236 с.
3. Шоймкулов Б.М., К теории некоторых переопределенных систем уравнений в частных производных второго порядка с сингулярными точками на плоскости / Б.М. Шоймкулов, Э. Рузметов // Дифференциальные и интегральные уравнения и их приложения (сборник научных статей), ТГПУ, вып.6, Душанбе-1998.- С.96-106.
4. Шоймкулов Б.М. Интегральные представление многообразия решений некоторых переопределенных систем двух уравнений в частных производных второго порядка с сингулярными коэффициентами / Б.М. Шоймкулов // Вестник педагогического университета (серия естественных наук), ТГПУ, № 5, часть 1,Душанбе- 1999.-С.102- 105.
5. Шоймкулов Б.М., Интегральные представления многообразия решений некоторых переопределенных систем трех уравнений в частных производных второго порядка с сингулярными точками в полярных координатах / Б.М. Шоймкулов, Н.Р. Раджабов // Дифференциальные и интегральные уравнения и их приложения (сборник научных статей), ТГПУ, вып.8, Душанбе-1999. -С.105-108.

6. Шоймкулов Б.М. Интегральные представление многообразия решений некоторых переопределенных систем трех уравнений в частных производных второго порядка с сингулярными точками на плоскости/ Б.М. Шоймкулов // Дифференциальные и интегральные уравнения и их приложения (сборник научных статей), ТГПУ, вып.8, Душанбе-1999.- С.109-111.

ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННАЯ СИСТЕМА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ОДНОЙ СВЕРХСИНГУЛЯРНОЙ И ОДНОЙ СИНГУЛЯРНОЙ ПЛОСКОСТЬЮ В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В настоящей работе исследована переопределенная система дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с одной сверхсингулярной и одной сингулярной плоскостью в трехмерном пространстве.

Ключевые слова: дифференцирование, уравнения, частные производные, условия совместности, переопределенная, плоскость, системы дифференциальных уравнений, сингулярные, сверхсингулярные.

OVER DRTERMINRD SYSTEM OF DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE FIRST ORDER WITH ONE SUPERSINGULAR AND ONE SINGULAR PLANES IN THREE-DIMENSIONAL SPACE

In this paper, we investigate a redefined system of first-order partial differential equations with one supersingular and one singular planes in three-dimensional space.

Key words: differentiation, equations, partial derivatives, compatibility conditions, redefined, plane, systems of differential equations, singular, supersingular.

Сведения об авторе: ***Шоймкулов Бойтура Махмудбекович*** **–** доцент кафедры математического анализа и теории функций Таджикского национального университета. Телефон: **(+992) 919-43-11-84.**